



TITLE:

# Intertwining Operatorの超局所性について (対称空間上の不変微分方程式)

AUTHOR(S):

岡本, 清郷; 木幡, 篤孝; 田中, 誠

---

CITATION:

岡本, 清郷 ...[et al]. Intertwining Operatorの超局所性について (対称空間上の不変微分方程式). 数理解析研究所講究録 1975, 249: 22-26

ISSUE DATE:

1975-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105694>

RIGHT:

# Intertwining operator の超局所性について

広大 理学部 岡本 清郷

木幡 篤考

田中 誠

$G$  を連結半単純リー群とし,  $G = \bigcup_{w \in W} MANwMAN$  を  $\Sigma$  の Bruhat 分解とする。  $A$  のリー環を  $\sigma$  とし,  $\Sigma$  の dual space を  $\sigma^*$  と表わす。 任意の  $\lambda \in \sigma^*$  に対し  $\chi_\lambda(man) = e^{(-i\lambda + \rho)(\log a)}$  により  $MAN$  の指標  $\chi_\lambda$  を定義する。 Bruhat の理論から  $B(L_\lambda)$  から  $B(L_\mu)$  への任意の Intertwining operator は

$$(*) \quad f \in B(G), \quad f(mangm'a'n') = e^{(i\lambda + \rho)(\log a)} e^{(i\mu - \rho)(\log a')} f(g)$$

なる hyperfunction  $f$  を核函数とする Integral operator であることが分る。 今,  $B(L_\lambda) \ni \varphi \leftrightarrow (\varphi_w)_w$

$\varphi_w \in B(\bar{N})$  という同一視を,  $\varphi(\omega x man) = \chi_\lambda(man) \bar{\varphi}_w(x)$ ,  $x \in \bar{N}$  によって行う。 最近, 柏原氏によって Intertwining

operator を超局所的に研究する program が作られた。 ここでは次の様な群について,  $\Sigma$  のアイデアを述べる。  $G = SL(2, \mathbb{R})$ ,  $SL(3, \mathbb{R})$ ,  $SO_0(n, 1)$ ,  $SU(n, 1)$ ,  $Sp(2, \mathbb{R})$ 。

$$G = SL(2, \mathbb{R}) \text{ のとき; } G = \bar{N}MAN \cup \omega_0 \bar{N}MAN,$$

$\omega_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$   $\varphi \in B(L_{-\lambda, \varphi})$  に対し  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & 1 \\ 0 & -\frac{1}{x} \end{bmatrix}$  であるから,  $\varphi_0(x) = |x|^{\lambda-1} \varphi_\infty(y)$ ,  $y = -1/x$ . 次に, (\*) を満たす  $f$  に対し,  $N$  と  $A$  の作用によって微分方程式を作る.

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x/(1+t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ 0 & 1/(1+t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^{t/2}x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{bmatrix}$$

$$f_0(x) = (1+t)^{\mu-1} f_0(x/(1+t)), \quad f_0(e^t x) = e^{(\mu-\lambda-1/2)t} f_0(x)$$

$t=0$  における微係数を取ると,

$$\begin{cases} (x \frac{d}{dx} + \frac{\lambda-\mu+2}{2}) f_0(x) = 0 \\ (x^2 \frac{d}{dx} - (\mu-1)x) f_0(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-t & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t/2}y & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{bmatrix}$$

$f_\infty(y) = f_\infty(y-t)$ ,  $f_\infty(e^t y) = e^{\frac{\lambda+\mu}{2}t} f_\infty(y)$   $t=0$  における微係数を取ると,

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} f_\infty(y) = 0 \\ (y \frac{d}{dy} - \frac{\lambda+\mu}{2}) f_\infty(y) = 0 \end{cases}$$

上の微分方程式系から  $f_\infty(y) = \text{const.}$

1)  $\lambda + \mu \neq 0$  のとき  $f_\infty(y) = 0$

i)  $\lambda \neq \mu$  のとき  $f = 0$  ii)  $\lambda = \mu$  のとき  $f_0(x) = c \delta(x)$

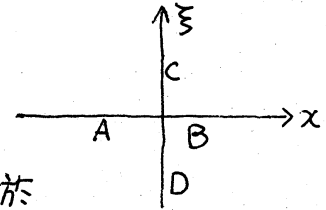
2)  $\lambda + \mu = 0$  のとき

i)  $\lambda \neq 0, 1, 2, \dots$  のとき  $f_0(x) = c |x|^{-\lambda-1}$

ii)  $\lambda = 0$  のとき  $f_0(x) = c_1 P(\frac{1}{x}) + c_2 \delta(x)$  - 方 transition

function から  $f_0(x) = c_2 \delta(x)$  iii)  $\lambda = 1$  のとき  $f_0(x) = c_1 P(\frac{1}{x^2}) + c_2 \delta'(x) \dots$

上の微分方程式系の characteristic variety の各既約成分上、方程式系が multiplicity 1 であるから解は 1 次元である。更に、ここで最も重要なのは『 $\lambda$  が整数でないときは上の微分方程式系の点  $(x, \xi) = (0, 0)$  の近傍に於ける解は A, B, に於ける値を与えれば C, D, に於ける値がそれぞれ一意的に決定される。』ということである。



次に、Intertwining operator が micro-local operator であるかどうか調べる。

1)  $G = SL(2, \mathbb{R})$

$\omega_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $|x|^\lambda$  の convolution すなわち  $|x-y|^\lambda$  が Intertwining operator の核函数である。従って micro-local operator である。

2)  $G = SL(3, \mathbb{R})$

$\omega_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $|z|^\lambda |z-xy|^\mu$  の convolution, すなわち  $|w-z-y(u-x)|^\lambda |w-z-v(u-x)|^\mu$  が Intertwining operator の核函数であるが、これの Singular support は anti-diagonal  $\Delta^a$  に含まれない。従って, micro-local operator ではない。

3)  $G = SO_0(n, 1)$   $\omega_0 = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$ ,  $(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)^\lambda$

Intertwining operator の核函数は  $((u_1 - x_1)^2 + \dots + (u_{n-1} - x_{n-1})^2)^\lambda$  である。  $(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)^\lambda$  の満たす微分方程式を作ると,

$$\begin{cases} (x_1 D_{x_1} + \dots + x_{n-1} D_{x_{n-1}} - 2\lambda) u = 0 \\ (x_j D_{x_i} - x_i D_{x_j}) u = 0 & i < j \end{cases}$$

従って, Intertwining operator の Singular support は anti-diagonal  $\Delta^a$  に含まれているから, micro-local operator である。

$$4) G = SU(n, 1)$$

$$\omega_0 = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad (|y|^2 + s^2)^\lambda, \quad y = (y_1, \dots, y_{n-1})$$

$y_i : \text{complex}, \quad s : \text{real}$

Intertwining operator の核函数は  $f^\lambda = (|z - y|^2 + 4(u - s + \text{Im}(z, y))^2)^\lambda$

$z = (z_1, \dots, z_{n-1}), \quad y = (y_1, \dots, y_{n-1}), \quad z_i, y_i : \text{complex}$

$u, s : \text{real}$  である。  $f^\lambda$  の満たす微分方程式を作ると,

$$\left\{ \begin{array}{l} (f \frac{\partial}{\partial(\text{Re} z_j)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial(\text{Re} z_j)}) f^\lambda = 0 \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ (f \frac{\partial}{\partial(\text{Im} z_j)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial(\text{Im} z_j)}) f^\lambda = 0 \\ (f \frac{\partial}{\partial(\text{Re} y_j)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial(\text{Re} y_j)}) f^\lambda = 0 \\ (f \frac{\partial}{\partial(\text{Im} y_j)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial(\text{Im} y_j)}) f^\lambda = 0 \\ (f \frac{\partial}{\partial u} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u}) f^\lambda = 0 \\ (f \frac{\partial}{\partial s} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s}) f^\lambda = 0 \\ (\frac{\partial}{\partial(\text{Re} z_j)} + \frac{\partial}{\partial(\text{Re} y_j)} - \frac{1}{2}(-\bar{y}_j + y_j + \bar{z}_j - z_j) \frac{\partial}{\partial u}) f^\lambda = 0 \\ (\frac{\partial}{\partial(\text{Im} z_j)} + \frac{\partial}{\partial(\text{Im} y_j)} + (-\bar{y}_j - y_j + \bar{z}_j + z_j) \frac{\partial}{\partial u}) f^\lambda = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{L}(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial s}) f^\lambda = 0$$

従って, Intertwining operator の Singular support は anti-diagonal  $\Delta^a$  に含まれるから,  $f^\lambda$  は micro-local operator である。

$$5) G = Sp(2, \mathbb{R})$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Intertwining operator は,}$$

$$|y|^\lambda \begin{vmatrix} y & z \\ z+xw & w \end{vmatrix}^\mu \text{ である。}$$

この場合も,  $SL(3, \mathbb{R})$  の場合と同様に micro-local operator ではない。

終